

(أي مجموعة مفتوحة = اجتماع الكرات المفتوحة)

Date : / /



Subject: ...

د. محمد هنتي

تكون المجموعة A من الفضاء الطوبولوجي (X, τ) مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كان جواراً لكل نقطة من نقاطها

البرهان

لنرمز الشرط

ننظر من أن A مفتوحة و $x \in A$ نقطة منها عندئذ يكون $x \in A \subseteq A$ إذاً في جوار

كفاية الشرط

لنأخذ نقطة كيفية $x \in A$ ولدينا من الفرض A جوار x ومن تعريف الجوار توجد مجموعة مفتوحة $U_x \in \tau$ بحيث أن $x \in U_x \subseteq A$ ومن هنا نجد أن $A = \bigcup_{x \in A} U_x$

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \quad U_x \subseteq A$$

وبالتالي أصبح لدينا

$A = \bigcup_{x \in A} U_x$ إذاً A في اجتماع مجموعات مفتوحة وبالتالي

فإن A مفتوحة

تعريف:

لنكن $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ أسرة من جوارات النقطة x في الفضاء الطوبولوجي (X, τ) ونسب الأسرة U جملة أساسية للجوارات النقطة x إذا كان أي جوار للنقطة x يحتوي على أحد عناصر الأسرة U

مثال:

لو أخذنا الفضاء الطوبولوجي المترقي (\mathbb{R}, τ) فإن أسرة الكرات المفتوحة $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ تشكل جملة أساسية للجوارات المفتوحة (جوارات النقطة x) لأنه لو أخذنا أي جوار U فهو يحتوي على هذه الكرات المفتوحة

مثال 2:

لنأخذ الفضاء الطوبولوجي المنقطع (X, τ) المنقطع

سجل المجموعات لهذا الفضاء هي مجموعة مفتوحة

$\{x\}$ جملة أساسية (احسب الشرط) لأنها جوار وأي جوار آخر يحتويها

في سلا المجموعات التي تحتوي على x

مثال 3:

نفرض ان $x = R$ و $\mathcal{T} = \{u \subseteq R : 1 \in u\} \cup \{\emptyset\}$

$\{1\}$ و $\{1, x\}$

هدف هذا التعريف اننا لا نأخذ جميع الجواران فقط نأخذ بعض الجواران الواضحة تكفي

قاعدة الطوبولوجيا

في سيز من الأضبان يمكن معرفة جميع المجموعات المفتوحة بمعرفة جزء منها هذا الجزء يسمى قاعدة أو أساس للطوبولوجيا يعرف بدقة في التوالمالي

تعريف:

ليكن (X, \mathcal{T}) فضاء طوبولوجي و \mathcal{B} أسرة في المجموعات المفتوحة $(\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T})$ نسمى الأسرة \mathcal{B} قاعدة للطوبولوجية \mathcal{T} أو للفضاء الطوبولوجي

إذا كان أي عنصر من \mathcal{T} يصادي اجتماعاً لعناصر من \mathcal{B} إذا:

نفرض لدينا الفضاء الطوبولوجي المتري منه مجموعات مفتوحة مترية بالفضاء المتري (X, d) أن أسرة الكرات المفتوحة تشكل قاعدة للطوبولوجيا المتري لا أنه "صعب مبرهنة سابقة" (أي مجموعة مفتوحة = اجتماع كرات مفتوحة)

مثال 1: عند البرهان مع يأخذ مثال واحد فقط (يكفي له)

في R أسرة المجالات المفتوحة

والقاعدة هي:

في R^2 أسرة الأضراس الدائرية المفتوحة

مثال 2:

لنأخذ $X = \{a, b, c\}$ هذه الأسرة الطوبولوجيا ضعيفة القوية

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$

أن الأسرة $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ تشكل قاعدة \mathcal{T}

$\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} u_i$

والاجتماع لا أسرة خالية هي مجموعة خالية

$X = \bigcap_{i \in \emptyset} u_i$

• لتجار هذه الصيغة يعرف بعض المؤلفين قاعدة الطوبولوجيا بالقول
 أن B نفس قاعدة للطوبولوجيا τ إذا كانت أي مجموعة مفتوحة غير
 خالية تأتي اجتماعاً لنهاية من B
 • في الحالة العامة (صحة هذا اعتدال)

نفرض X أي مجموعة τ أي التوبولوجيا τ الطوبولوجيا القوية عليها أن قاعدة
 هذه الطوبولوجيا هي $B = \{ \{x\} \}$ أسرة المجموعات وحيدة العنصر
 تشكل قاعدة للطوبولوجيا القوية τ_{xx} $\{ \{x\} \}$ أسرة المجموعات وحيدة العنصر τ_{xx}
 المجموعات وحيدة العنصر τ_{xx}

ملاحظة:

نفرض أن B قاعدة للفضاء الطوبولوجي (X, τ) و B^* أسرة من المجموعات
 المفتوحة حيث $B \subseteq B^*$ B^* تحوي B و B^* تكون أيضاً قاعدة
 ملاحظة:

أما إذا كان لدينا قاعدة τ وأصغرت لها مجموعات مفتوحة τ^*
 تبقى قاعدة τ والحد الأدنى لأصغرت المجموعات المفتوحة هو بعد المجموعات
 المفتوحة τ τ^* أن τ^* طوبولوجيا هي قاعدة لنفسها
 وقد تكون طوبولوجيا الواحدة أكثر من قاعدة

برهان:

لنكن B أسرة المجموعات المفتوحة للفضاء الطوبولوجي (X, τ)
 تكون الأسرة B قاعدة للطوبولوجيا τ إذا وفقط إذا كانت الأسرة
 $\tau = \{ \{x\} \mid x \in X \}$ أسرة المجموعات

إذا وفقط إذا كانت هذه الأسرة تشكل مجلة أساسية لجواران
 النقطة x « ذلك من أجل أي نقطة x من الفضاء.

البرهان:

لنرمز الشرط:

نفرض أن B قاعدة للفضاء.

ولنأخذ النقطة x ولناخذ جواراً G لـ x وليكن G جواراً
 $x \in G$

ملاحظة

ليس من الضروري أن تكون أي أسرة من المجموعات قاعدة لطوبولوجيا ما على X .

مثال 1

لواحدنا $X = \{a, b, c\}$ و $B = \{b, c\}$ و $A = \{a, b\}$

فإن الأسرة $H = \{X, \emptyset, A, B\}$

لا تشكل قاعدة لأي طوبولوجيا على X لأن شرط التقاطع غير محقق.

لا نقصد (بطريقة نفقن الفرض)

لنفرض جديلاً أن H قاعدة لطوبولوجيا ما على X $H \subseteq \tau \subseteq X$ من

جسمة ناسية إذا احتلنا أي عنصر من τ يجب أن يلي اجتماع لعناصر

من H ونلاحظ أن أي اجتماع لعناصر من H هو عنصر من H

وهذا يعني $H \subseteq \tau$ (حيث H توي τ) ومنه يكون

$\tau = H$ هذا يعني أن H طوبولوجيا وهذا غير صحيح وهذا يتناقض

لأن $A \cap B \notin H$

مثال 2

مبرهنة

لتكن X مجموعة ما، B أسرة من المجموعات مجموعاتها الجزئية تحقق الشرطين التاليين

(1) X يساوي اجتماعاً لعناصر B

(2) من أجل أي $a, b \in B$ وأي عنصر $x \in a \cap b$ توجد مجموعة c من B بحيث $x \in c \subseteq a \cap b$

نحسب $a \cap b \subseteq \tau$

أن الأسرة τ المولدة من المجموعات التي سبقتها يساوي اجتماع لعناصر من B

بأن طوبولوجيا على X وتسمى طوبولوجيا الوحيدة التي قاعدتها B

البرهان

$$A \cap B = \bigcup_{x \in A \cap B} \{x\} \quad (1)$$

(2) أن B يشكل قاعدة لـ τ من طريقة بانيها